

Contrôle Final : correction.

Partie I (à rédiger sur une première copie)

Correction Exercice 1 1. On traite à part le cas $p = 0$ pour ne pas avoir à diviser par 0 plus tard et on utilise la parité de $|t|$:

$$\int_{-1}^1 |t| dt = 2 \int_0^1 t dt = [t^2]_0^1 = 1$$

Si $p \neq 0$, on utilise le changement de variable $s = -t$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |t| e^{-ipt} dt &= \int_{-1}^0 -t e^{-ipt} dt + \int_0^1 t e^{-ipt} dt \\ &= \int_1^0 s e^{ips} (-ds) + \int_0^1 t e^{-ipt} dt \\ &= \int_0^1 t(e^{ipt} + e^{-ipt}) dt = \int_0^1 2t \cos(pt) dt. \end{aligned}$$

On finit le calcul en passant par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |t| e^{-ipt} dt &= [2t \sin(pt)/p]_0^1 - 2 \int_0^1 \sin(pt)/p dt \\ &= 2 \sin(p)/p + [2 \cos(pt)/p^2]_0^1 = \frac{2}{p^2} (p \sin(p) + \cos(p) - 1). \end{aligned}$$

2. On a par définition du sinus :

$$\int_{-\pi}^{\pi} 2i \sin(t) e^{-ipt} dt = \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i(1-p)t} - e^{i(-1-p)t}) dt.$$

On traite à part le cas $p = 1$ où la réponse vaut :

$$[t + e^{i(-1-p)t}/i(1+p)]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi - 2 \sin((1+p)\pi)/(1+p).$$

puis le cas $p = -1$ où la réponse vaut :

$$[e^{i(1-p)t}/i(1-p) - t]_{-\pi}^{\pi} = 2 \sin((1-p)\pi)/(1-p) - 2\pi.$$

Dans le cas général la réponse vaut :

$$[e^{i(1-p)t}/i(1-p) + e^{i(-1-p)t}/i(1+p)]_{-\pi}^{\pi} = 2 \sin((1-p)\pi)/(1-p) - 2 \sin((1+p)\pi)/(1+p).$$

Correction Exercice 2 1. OUI : on a même convergence normale car $\|u_n\|_{\infty} = 1/n^2$ pour tout $n \geq 1$ puis par Riemann ($1 < 2$) la série correspondante converge.

2. NON : la suite $u_n(1/n) \equiv 1$ ne tend pas vers 0.

3. NON : on n'a même pas convergence simple (par comparaison avec série de Riemann $1/(n+1)$ pour n'importe quel x).